

TEMA	Tema III. Números e Operações/Álgebra e Funções
HABILIDADE	D22 - Resolver problema envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral
CONTEÚDOS	Sequências e Progressões

APRESENTAÇÃO

Professor(a),

O objetivo dessa sequência didática é tratar das sequências escritas nas formas de progressões aritméticas (PA) e geométricas (PG).

Duração: 4 aulas

Professor(a), como a PA e a PG são casos particulares de sequências, deve-se iniciar seu estudo a partir da utilização de sequências variadas, inclusive aquelas que não têm uma lei de formação. É fácil mostrar que o conjunto dos números naturais forma uma PA infinita, a partir da sua definição. A demonstração da fórmula do termo geral é bastante simples e deve ser exercitada como alternativa à sua memorização.

ATIVIDADE 1

Resolva as questões.

1. (Banestes 2015). A senha de meu cofre é dada por uma sequência de seis números, todos menores que 100, que obedece a determinada lógica. Esqueci o terceiro número dessa sequência, mas lembro-me dos demais. São eles: {32, 27, __, 30, 38, 33}. Assim, qual o terceiro número da sequência?

- (A) 35
- (B) 31
- (C) 34
- (D) 40
- (E) 28

Resolução:

Analisando a sequência, é possível verificar que os valores alternam-se subtraindo 5 e somando 8:

$$32 - 5 = 27$$

$$30 + 8 = 38$$

$$38 - 5 = 33$$

Logo, o terceiro número da sequência será dado por $27 + 8 = 35$.

2. (PM PB – IBFC – Adaptado). Os números estão dispostos em sequência lógica 0, 5, 50, 5, 10, 45, 10, 15, 40, 15,... Nessas condições a soma entre os dois próximos números dessa sequência é:

- (A) 55
- (B) 50
- (C) 45
- (D) 60
- (E) 65

Resolução:

Analisando a sequência, é possível verificar que ela composta por duas leis, onde os termos múltiplos de 3 são determinados subtraindo-se 5:

$$_, _, 50, _, _, 45, _, _, 40, _, _, 35, \dots$$

O restante da sequência é dado por múltiplos de 5, sendo que há repetição dos elementos para iniciar uma nova sequência:

$$_, 5, _, 5, 10, _, 10, 15, _, 15, 20, _, 20, 25, \dots$$

Logo, os dois próximos termos da sequência são 20 e 35, assim, $20 + 35 = 55$.

3. Analise a sequência

(4, 7, 10, 13, 16, ...).

Sendo n um número natural que indica a posição de cada termo, qual lei de formação que os seus termos obedecem?

- (A) $n + 1$
- (B) $2n + 1$
- (C) $3n + 1$
- (D) $4n + 1$
- (E) $5n - 1$

Resolução:

Analisando a sequência, o(a) estudante pode testar cada alternativa e identificar que os termos são determinados pela lei $3n + 1$.

$$3 \times 1 + 1 = 4$$

$$3 \times 2 + 1 = 7$$

$$3 \times 3 + 1 = 10$$

$$3 \times 4 + 1 = 13$$

$$3 \times 5 + 1 = 16$$

Nas questões anteriores, foram utilizadas situações envolvendo sequências por lógica e lei de formação, nas atividades seguintes serão exploradas sequências com características de PA e PG com uso de suas fórmulas.

4. Ao financiar uma casa no total de 20 anos, Carlos fechou o seguinte contrato com a financeira: para cada ano, o valor das 12 prestações deve ser igual e o valor da prestação mensal em um determinado ano é R\$ 50,00 a mais que o valor pago, mensalmente, no ano anterior. Considerando que o valor da prestação no primeiro ano é de R\$ 150,00, qual o valor da prestação no último ano?

Se necessário use $a_n = a_1 + (n - 1)r$

- (A) 900 reais
- (B) 1.100 reais
- (C) 1.300 reais
- (D) 1.500 reais
- (E) 1.700 reais

Resolução:

Se o(a) estudante optar em usar a fórmula do termo geral da PA:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_{20} = 150 + (20 - 1)50$$

$$a_{20} = 150 + (19)50$$

$$a_{20} = 150 + 950$$

$$a_{20} = 1100$$

Assim, no último ano a prestação será de R\$1.100,00

5. Um ciclista percorre 40 km na primeira hora; 34 km na segunda hora, e assim por diante, formando uma progressão aritmética. Quantos quilômetros percorrerá na 6ª hora?

Se necessário use $a_n = a_1 + (n - 1)r$

- (A) 12 km
- (B) 11 km
- (C) 10 km
- (D) 9 km
- (E) 8 km

Resolução:

Importante observar que a PA é decrescente (40, 34, ...):

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_6 = 40 + (6 - 1)(-6)$$

$$a_6 = 40 + (5)(-6)$$

$$a_6 = 40 - 30$$

$$a_6 = 10$$

Assim, na sexta hora ele percorrerá 10 km.

6. (Fuvest – SP adaptado) Quantos múltiplos de 9 há entre 100 e 1 000?

Se necessário use $a_n = a_1 + (n - 1)r$

- (A) 12
- (B) 11
- (C) 10
- (D) 9
- (E) 8

Resolução:

Um número é divisível por 9 quando a soma dos seus algarismos for igual a um número múltiplo de 9. Então a progressão deve começar a partir do 108, que é o primeiro número divisível por 9, e terminar no número 999. Dessa forma, temos que o primeiro termo é igual a 108, o último termo igual a 999 e a razão será 9.

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$999 = 108 + (n - 1)9$$

$$999 = 108 + 9n - 9$$

$$999 - 108 + 9 = 9n$$

$$9n = 900$$

$$n = 900/9$$

$$n = 100$$

Entre os números 100 e 1000 existem 100 múltiplos de 9.

7. (Vunesp – SP – Adaptado) Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. Elas deverão ser empilhadas respeitando a seguinte ordem: uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já estejam na pilha. Por exemplo:

1ª pilha	2ª pilha	3ª pilha	4ª pilha
uma tábua	duas tábuas	quatro tábuas	oito tábuas

Qual a quantidade de tábuas empilhadas na 12ª pilha.

Se necessário use $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

- (A) 2030
- (B) 2036
- (C) 2040
- (D) 2044
- (E) 2048

Resolução:

As tábuas são empilhadas de acordo com uma progressão geométrica de razão 2. Então:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{12} = 1 \cdot 2^{12-1}$$

$$a_{12} = 1 \cdot 2^{11}$$

$$a_{12} = 1 \cdot 2048$$

$$a_{12} = 2048$$

Na 12ª pilha teremos 2048 tábuas.

8. Qual é o décimo quinto termo da PG (1, 2, 4, 8, ...)?

Se necessário use $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

- (A) 10000
- (B) 12584
- (C) 16384
- (D) 20384
- (E) 22004

Resolução:

Note que a razão da PG é 2, pois esse é o resultado da divisão de qualquer termo por seu antecessor. Por exemplo, $2 : 1 = 2$. Substituindo os valores na fórmula, teremos:

$$a_{15} = 1 \cdot 2^{15-1}$$

$$a_{15} = 2^{15-1}$$

$$a_{15} = 2^{14}$$

$$a_{15} = \mathbf{16384}$$

REFERÊNCIAS:

1. < <https://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-matematica/> >, acesso em 09/07/2019.

2. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: ensino médio: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008.